Université Cadi-Ayyad
F.S.T.G

Session 2013

Concours communs d'accès aux cycles d'ingénieurs
Epreuve de Mathématiques
Durée 1h30

Exercice 1 *Soit* $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha_0 = 0$. *On considère les fonctions*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n x^n}{(n)!} \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n.$$

1. *Vérifier que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* g *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Exprimer à l'aide des fonctions usuelles les fonctions* $xf(x)$ *et* $e^{-x}f(x)$.
4. *Exprimer* $g' - g$ *en fonction de* f.
5. *Montrer que pour tout réel* x, $g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt$.
6. *On considère la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)dt.$$

   Montrer que la fonction F *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *et expliciter son développement.*
7. *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum_{n\geq 1} \alpha_n x^n$.
8. *Préciser l'ensemble de définition* Δ *de la fonction* h.
9. *Expliciter* $h(x)$ *pour tout* $x \in \Delta$.
10. *Expliciter la valeur de* $h(\frac{1}{2})$.

Exercice 2 *On considère l'équation différentielle*

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2. \qquad (E)$$

1. *Déterminer* a *tel que* $y_0(x) = ax$ *soit une solution particulière de* (E).
2. *On pose* $y = y_0 - \frac{1}{z}$. *Montrer que* y *est solution de* (E) *si et seulement si* z *est solution de l'équation différentielle*

$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1. \qquad (E_1)$$

3. *Résoudre* (E_1).
4. *Déterminer toutes les solutions de* (E) *sur* $]0, +\infty[$

Tawjihpress.com

$$\int \cos(x)^4 dx$$

a) Par un changement de variable convenable, montrez que :

$$\int \cos(x)^4 dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$$

b) Déduire la primitive de $\int \cos(x)^4 dx$.

Tawjihpress.com

c) Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)^4 dx$.

Exercice 2 (sur 10pts):

Soient $t \in \mathbb{R}$ et A_t la matrice réelle d'ordre 3 donnée par

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1-4t & -1+4t \\ -3t & -1+2t & 2+t \\ -3t & -2-t & 3+4t \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le rang de la matrice $B_t = A_t - (1+3t)I_3$ suivant les valeurs de t. (où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3)

2) Déduire de la question précédente une valeur propre de la matrice A_t et la dimension du sous-espace propre associé. (Discuter selon la valeur de t)

Tawjihpress.com

3) Calculer $A_t v$, où $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire une valeurs propre de A_t indépendamment de la valeur t.

4) En utilisant la trace de la matrice A_t, déterminer la troisième valeur propre de A_t et déduire de ce qui précède les valeurs de t pour lesquelles la matrice A_t est diagonalisable.

5) On pose $t = 1$. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale tels que $A_1 = PDP^{-1}$.

6) Déduire de la question précédente une racine carrée de la matrice A_1 (une matrice M telle que $M^2 = A_1$).